

## MODELLIZZAZIONE NUMERICA DI MATERIALI POROELASTICI

Paolo Bonfiglio, Francesco Pompoli, Paresh Shrivage  
Dipartimento di Ingegneria, Università di Ferrara, Ferrara

### 1. Introduzione

La teoria più generale per la propagazione del suono nei mezzi poroelastici è stata proposta da Biot [1] nel 1956. Essa consente di studiare anche la propagazione di onde elastiche nella struttura del materiale, individuandone tre tipologie: onde trasversali e onde longitudinali compressionali che Biot definisce di tipo I e II (slow e fast waves). Il modello di Biot permette di aggiungere alla legge di propagazione del suono nel materiale poroso, considerato rigido, l'effetto delle onde elastiche che si verificano nella sua struttura, a partire dalle proprietà elastiche del materiale stesso (densità, modulo di Young, coefficiente di Poisson e smorzamento interno).

Una descrizione della teoria di Biot applicata a materiali porosi a struttura elastica è stata sviluppata da Allard [2]. Tale approccio è basato sull'accoppiamento degli spostamenti della fase solida e fluida del materiale (formulazione  $u-U$ ).

Diversi modelli numerici (principalmente utilizzando modelli agli elementi finiti) basati sull'approccio di Biot-Allard sono stati proposti per la modellizzazione del comportamento vibro-acustico di mezzi poroelastici. Tuttavia è stato dimostrato che la formulazione ( $u-U$ ) ha lo svantaggio di richiedere enormi tempi di calcolo per modelli complessi.

Per risolvere questa limitazione è possibile utilizzare una formulazione mista ( $u,p$ ) in cui viene considerato l'accoppiamento tra lo spostamento della fase solida del materiale e la pressione del fluido che si trova all'interno dei pori. Tale teoria è stata proposta da Atalla *et al.* [3].

Nel presente articolo verrà presentata l'implementazione della formulazione mista ( $u,p$ ) per mezzo di un codice agli elementi finiti commerciale. Infine verrà presentata e discussa la validazione del modello per mezzo di risultati sperimentali su un campione di melamina.

## 2. La formulazione mista ( $u, p$ )

Nella loro formulazione originale, le equazioni di Biot possono essere espresse nel seguente modo:

$$(1) \quad \begin{cases} \operatorname{div} \underline{\underline{\sigma}}^s = \rho_{11} \ddot{\underline{u}} + \rho_{12} \ddot{\underline{U}} + b(\dot{\underline{u}} - \dot{\underline{U}}) \\ \operatorname{div} \underline{\underline{\sigma}}^f = \rho_{22} \ddot{\underline{U}} + \rho_{12} \ddot{\underline{u}} - b(\dot{\underline{u}} - \dot{\underline{U}}) \end{cases}$$

dove  $u$  e  $U$  denotano rispettivamente i vettori spostamento macroscopici (spostamenti medi dei volumi per unità di sezione) della fase solida e della fase fluida rispettivamente. Le densità  $\rho_{11}$  e  $\rho_{22}$  sono coefficienti di massa che prendono in considerazione il fatto che il flusso relativo attraverso i pori non è uniforme. Tali coefficienti sono legati alla densità di massa del materiale di cui è costituito lo scheletro e alla densità di massa del fluido interstiziale. Il coefficiente  $\rho_{12}$  considera le interazioni tra le forze di inerzia del solido e la fase fluida e si dimostra che esso è funzione della tortuosità del materiale. Inoltre  $\sigma^s$  e  $\sigma^f$  denotano i tensori di tensione parziale associati rispettivamente alla particella dello scheletro e alla particella fluida macroscopica. Infine  $b$  è un termine di smorzamento, funzione della frequenza che tiene in considerazione le forze di interazione viscosse tra lo scheletro e il fluido.

Nella formulazione mista ( $u, p$ ) si assume che le proprietà del materiale poroso siano omogenee. Inoltre si dimostra che il vettore spostamento della fase fluida  $U$  può essere espresso in termini della pressione  $p$  nei pori e in termini di spostamento vettoriale della fase solida, ovvero:

$$(2) \quad \underline{U} = \frac{\phi}{\tilde{\rho}_{22} \omega^2} \nabla p - \frac{\tilde{\rho}_{12}}{\tilde{\rho}_{22}} \underline{u}$$

dove sono stati introdotti le seguenti densità effettive:

$$(3) \quad \tilde{\rho}_{11} = \rho_{11} + \frac{b}{j\omega} \quad \tilde{\rho}_{22} = \rho_{22} + \frac{b}{j\omega} \quad \tilde{\rho}_{12} = \rho_{12} + \frac{b}{j\omega}$$

essendo  $\phi$  la porosità del materiale e  $\omega$  la frequenza angolare.

Combinando il sistema (1) con le relazioni (2)-(3) si dimostra che le equazioni della poroelasticità di Biot in termini delle variabili ( $u, p$ ) sono date da:

$$(4) \quad \begin{cases} \operatorname{div} \underline{\underline{\hat{\sigma}}}^s(\underline{u}) + \omega^2 \tilde{\rho} \underline{u} + \tilde{\phi} \nabla p = 0 \\ \Delta p + \omega^2 \frac{\tilde{\rho}_{22}}{\tilde{R}} p - \omega^2 \frac{\tilde{\rho}_{22}}{\phi^2} \tilde{\gamma} \operatorname{div} \underline{u} = 0 \end{cases}$$

dove:

$$(5) \quad \underline{\underline{\sigma}} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} & \sigma_{yz} & \sigma_{zz} \end{pmatrix}, \quad \tilde{\rho} = \tilde{\rho}_{12} - \frac{(\tilde{\rho}_{12})^2}{\tilde{\rho}_{22}} \quad \text{e} \quad \tilde{\gamma} = \phi \left( \frac{\tilde{\rho}_{12}}{\tilde{\rho}_{22}} - \frac{Q}{R} \right)$$

Il termine  $\sigma$  è il classico tensore degli sforzi utilizzato nella teoria dell'elasticità lineare ed è funzione del modulo di Young, coefficiente di Poisson e smorzamento interno. I coefficienti  $\rho$  e  $\gamma$  sono legati, oltre che ai moduli di comprimibilità dello scheletro, alla densità e al modulo di comprimibilità del fluido. Tali grandezze possono essere determinate per mezzo del modello di Johnson-Champoux-Allard [2] dai valori di cinque grandezze fisiche (resistività al flusso d'aria, porosità, tortuosità, lunghezze caratteristiche viscosa e termica).

Il sistema (4) mostra la classica forma di equazioni di accoppiamento fluido-struttura. I primi due termini dell'equazione della fase solida rappresentano il comportamento dinamico del materiale nel vuoto mentre i primi due termini della fase fluida rappresentano il comportamento dinamico del fluido quando la struttura è considerata rigida. I terzi termini in entrambe le equazioni rappresentano le funzioni di accoppiamento tra le due fasi.

Riassumendo la propagazione del campo vibro-acustico all'interno di materiali a struttura elastica può essere modellizzata utilizzando il sistema di equazioni (4) una volta noti parametri fisici e meccanici del materiale in esame (resistività al flusso d'aria, porosità, tortuosità, lunghezze caratteristiche viscosa e termica, modulo di Young, coefficiente di Poisson, smorzamento interno e densità dello scheletro)

### 3. L'implementazione della formulazione mista $(u,p)$ per mezzo di un codice agli elementi finiti

Nel seguente paragrafo viene descritta l'implementazione del modello di Biot nella formulazione mista  $(u,p)$  per mezzo di un software commerciale agli elementi finiti (Comsol Multiphysics®).

E' stato in particolare modellizzato un materiale poroelastico omogeneo ed isotropo all'interno di un tubo ad onde piane per la determinazione dell'impedenza superficiale e del coefficiente di assorbimento acustico apparente per incidenza normale. Il provino è eccitato acusticamente su una superficie mentre le altre sono state considerate perfettamente vincolate.

Per la modellazione dei domini relativi alla fase solida e fluida, il sistema (4) è stato implementato utilizzando due set di equazioni alle derivate parziali. In particolare:

- fase solida: 
$$-\nabla \cdot \Gamma = F$$

dove  $\Gamma$  è il tensore degli sforzi e  $F$  il termine sorgente.

- fase fluida: 
$$\nabla(-c\nabla p) + ap = f$$

con  $c$  coefficiente di diffusione,  $a$  coefficiente di assorbimento e  $f$  termine sorgente.

Per quanto riguarda le condizioni al contorno sono state applicate i seguenti vincoli per i domini strutturale e acustico:

- superficie eccitata acusticamente:  $p=1$  (fase fluida)       $\sigma=-(1-\phi)\cdot p$  (fase solida)
- altre superfici:  $v_n=0$  (fase fluida)       $\underline{u} = 0$  (fase solida)

Il provino è stato discretizzato utilizzando degli elementi lagrangiani quadratici in

entrambe i domini.

In Figura 1 è riportata la geometria del modello implementato e la mesh utilizzata.

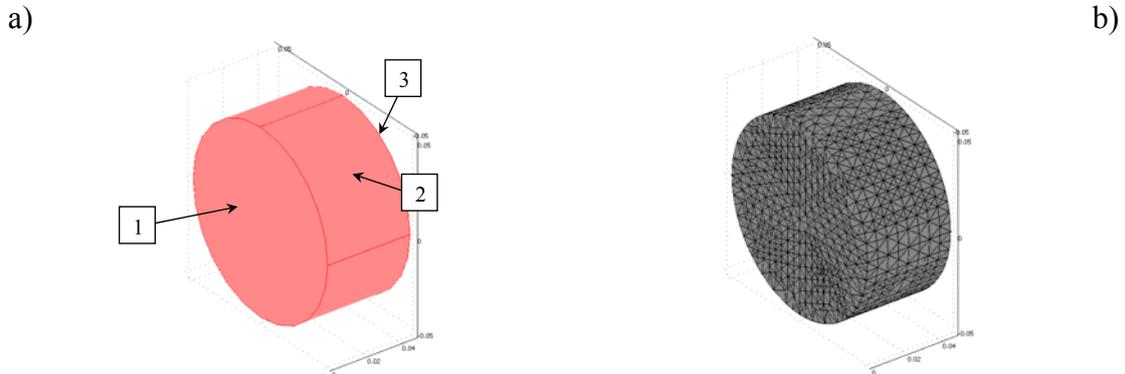


Figura 1 – a) Modello geometrico, condizioni al contorno; b) mesh

Sulla superficie 1 sono stati successivamente calcolati i valori medi della pressione acustica  $P$  e della componente normale della velocità di particella del fluido  $V_n$  e quindi sono stati determinati l'impedenza superficiale specifica e il coefficiente di assorbimento acustico apparente per incidenza normale per mezzo delle seguenti espressioni:

$$(6) \quad Z = \frac{1}{\rho_0 c_0} \frac{P}{V_n} \quad \text{e} \quad \alpha_n = \frac{4 \operatorname{Re}(Z)}{|Z|^2 + 2 \operatorname{Re}(Z) + 1}$$

A titolo di esempio in Figura 2 è riportato il risultato di una simulazione per il provino descritto nel paragrafo 4.1 insieme ad una curva di coefficiente di assorbimento per incidenza normale.

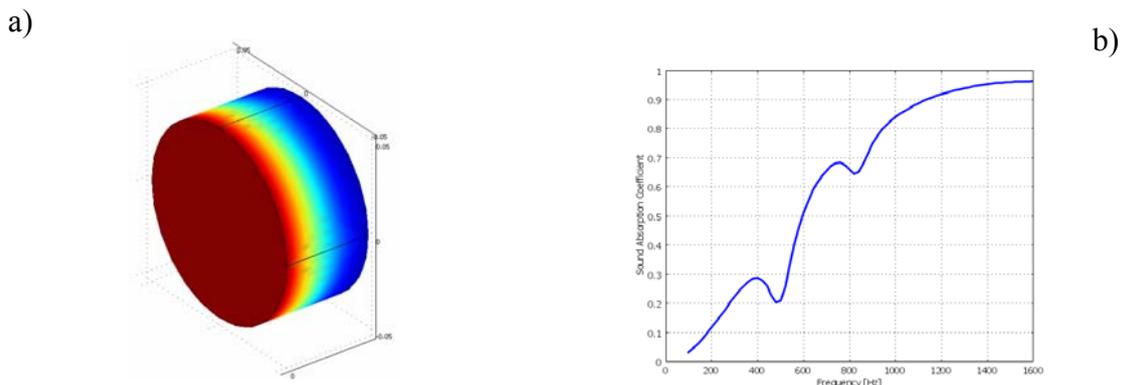


Figura 2 – Risultato di una simulazione: a) distribuzione di pressione, b) coefficiente di assorbimento per incidenza normale.

Per quanto riguarda i tempi di calcolo, una simulazione 50-4000Hz@step20Hz richiede circa 10 minuti su un computer con le seguenti caratteristiche: Processore@Intel2GHz, RAM@2Gb.

## 4. Risultati

Nel presente paragrafo verranno presentati due diversi approcci volti alla validazione e utilizzo del modello agli elementi finiti proposto nel presente articolo. Inizialmente il modello verrà utilizzato per validare i risultati di misure sperimentali delle proprietà meccaniche dei materiali poroelastici. Nella fase successiva il modello sarà utilizzato in combinazione con una procedura di inversione per la determinazione dei parametri meccanici (modulo di Young, coefficiente di Poisson e smorzamento interno) del materiale in esame. Infine verranno riportati e discussi risultati di un'analisi di sensitività sul modello implementato.

### 4.1. Utilizzo del modello FEM per la verifica delle misure sperimentali delle proprietà meccaniche dei materiali poroelastici

Per la fase di validazione qui proposta è stato utilizzato un campione di melammina avente spessore pari a 47mm. Inizialmente sono state effettuate misure sperimentali di resistività al flusso d'aria (secondo la norma EN 29053 [4]) con metodo a flusso d'aria alternato, misure di porosità [5] e di tortuosità [6]. Le grandezze caratteristiche sono state determinate mediante tecniche di minimizzazione. Dettagli sul software di inversione *ICT\_MAA* vengono riportati in [7]. I parametri meccanici sono stati determinati sperimentalmente mediante il metodo proposto da Marietz [8], che prevede la misura del coefficiente di Poisson dalla misura della deformazione laterale del campione sottoposto a deformazione quasi-statica e dalla successiva determinazione del modulo di Young e smorzamento interno per mezzo di una misura di impedenza meccanica. Dettagli sulla tecnica ed incertezza di misura vengono riportati in [9].

In Tabella 1 vengono riportati i valori dei nove parametri utilizzati nel modello.

Tabella 1. Parametri fisici e meccanici relativi al provino di melammina

$\sigma$ [Ns/m <sup>4</sup> ]	$\phi$	$\alpha_\infty$	$\Lambda$ [ $\mu$ m]	$\Lambda'$ [ $\mu$ m]	$E$ [Pa]	$\nu$	$\eta$	$\rho_{frame}$ [Kg/m <sup>3</sup> ]
10800	0.99	1.02	90	120	40895	0.25	0.05	8.4

Sono state infine effettuate misure di impedenza acustica superficiale e coefficiente di assorbimento acustico apparente secondo la norma ISO 10534-2 [10] con tubo ad onde stazionarie e metodo della funzione di trasferimento. Sono state effettuate misure delle proprietà acustiche superficiali utilizzando tubi di misura aventi diametro 100 mm (range di misura 100-1600 Hz) e 45 mm (range di misura 50-4200 Hz).

In Figura 3 sono riportati i confronti tra i valori sperimentali e simulati del coefficiente di assorbimento e dell'impedenza superficiale specifica per il campione di melammina in esame avente un diametro di 45 mm.

Come è possibile notare dalla Figura 3 il modello FEM riesce a prevedere la risonanza dovuta alla struttura elastica del materiale anche se la frequenza di risonanza del modello FEM risulta spostata di circa 200 Hz rispetto al valore sperimentale.

Le ragioni di tali scostamenti sono da imputare principalmente a due effetti. Il primo è legato alle condizioni di vincolo laterale; infatti nel modello FEM le pareti laterali e di fondo sono state considerate perfettamente vincolate al tubo di misura. Nelle misure sperimentali è stato utilizzato del nastro biadesivo. Inoltre va aggiunto che quando il materiale è posizionato all'interno del tubo, a causa di compressione sulle pareti laterali, le proprietà meccaniche possono cambiare a causa della natura non perfettamente elastica del materiale. In ogni caso si può concludere che le condizioni teoriche sono difficili da realizzare.

Infine si deve tener conto dell'effetto degli errori di misura delle proprietà meccaniche sul modello FEM; tali incertezze possono portare anche a variazioni significative sulle proprietà acustiche tali da giustificare le differenze evidenziate nelle figure successive. Tale effetto verrà discusso nel paragrafo 4.3 per mezzo di un'analisi di sensitività.

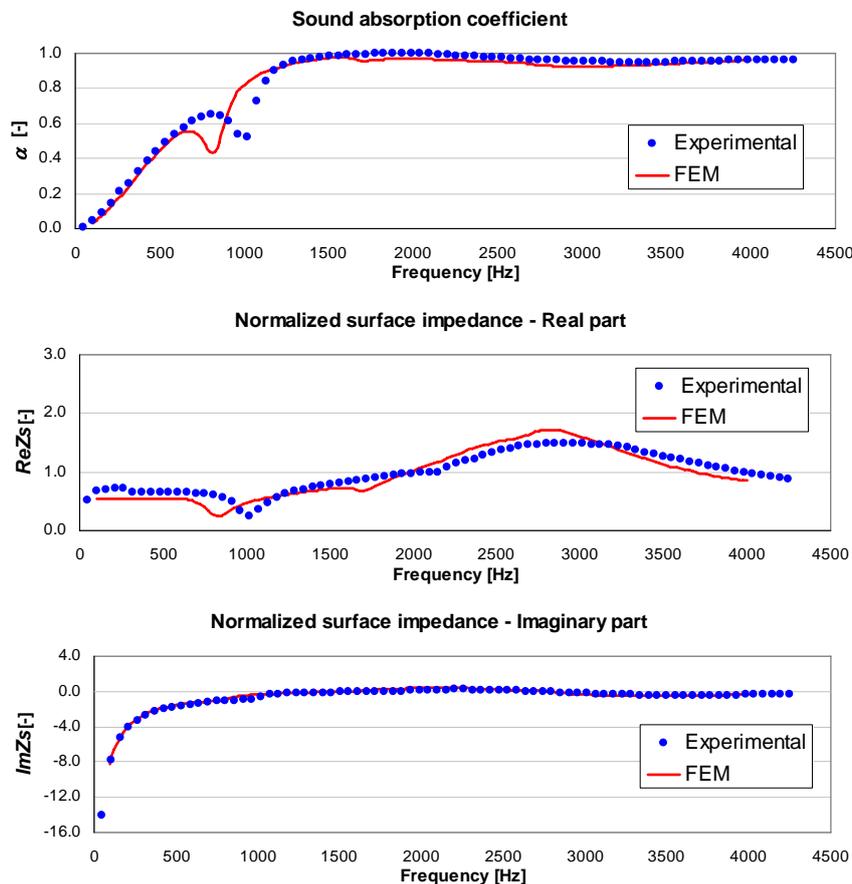


Figura 3 – Coefficiente di assorbimento acustico e impedenza superficiale normalizzata: confronto tra misure sperimentale e modello FEM per il campione di melamina avente diametro pari a 45 mm

#### 4.2. Utilizzo del modello FEM per la determinazione delle proprietà meccaniche dei materiali poroelastici

In questa sezione il modello sarà utilizzato per la determinazione dei parametri meccanici (modulo di Young, coefficiente di Poisson e smorzamento interno) del campione di melamina. Tali quantità vengono determinate partendo dai cinque parametri del materiale a struttura rigida ( $\sigma$ ,  $\phi$ ,  $\alpha_{\infty}$ ,  $A$  e  $A'$ ) e calcolando  $E$ ,  $\nu$  e  $\eta$  per mezzo di una minimizzazione (con procedura di best-fitting non lineare [11]) dei valori teorici del coefficiente di assorbimento acustico, determinato per mezzo della relazione (6), rispetto ai valori della stessa grandezza misurati sperimentalmente.

Per ridurre i tempi di calcolo è stato selezionato un range di frequenza (circa 500 Hz) nell'intorno della risonanza. L'intera procedura è stata implementata in Matlab® e Comsol Multiphysics®. I tempi di calcolo per la procedura di inversione proposta sono

dell'ordine di 1-2 ore.

I valori dei parametri meccanici ottenuti per mezzo della procedura di inversione sul provino di melammina (descritto nel paragrafo 4.1 e avente diametro 45mm) sono riportati in Tabella 2.

Tabella 2. Parametri meccanici ottenuti per mezzo della tecnica di inversione

<i>Modulo di Young: E [Pa]</i>	<i>Coefficiente di Poisson: <math>\nu</math></i>	<i>Smorzamento interno: <math>\eta</math></i>
58671	0.26	0.05

Dal confronto con i risultati riportati in Tabella 1 è possibile osservare un ottimo accordo per quanto riguarda il coefficiente di Poisson e lo smorzamento interno; il modulo di Young determinato per mezzo della procedura di inversione risulta più elevato (circa 17 kPa). In ogni caso si può concludere che la procedura di inversione può fornire una stima di massima delle proprietà meccaniche.

In Figura 4 sono riportati i confronti tra misure sperimentali e modello FEM per il campione di melammina avente un diametro pari a 45 mm, utilizzando i valori dei parametri meccanici riportati in Tabella 2.

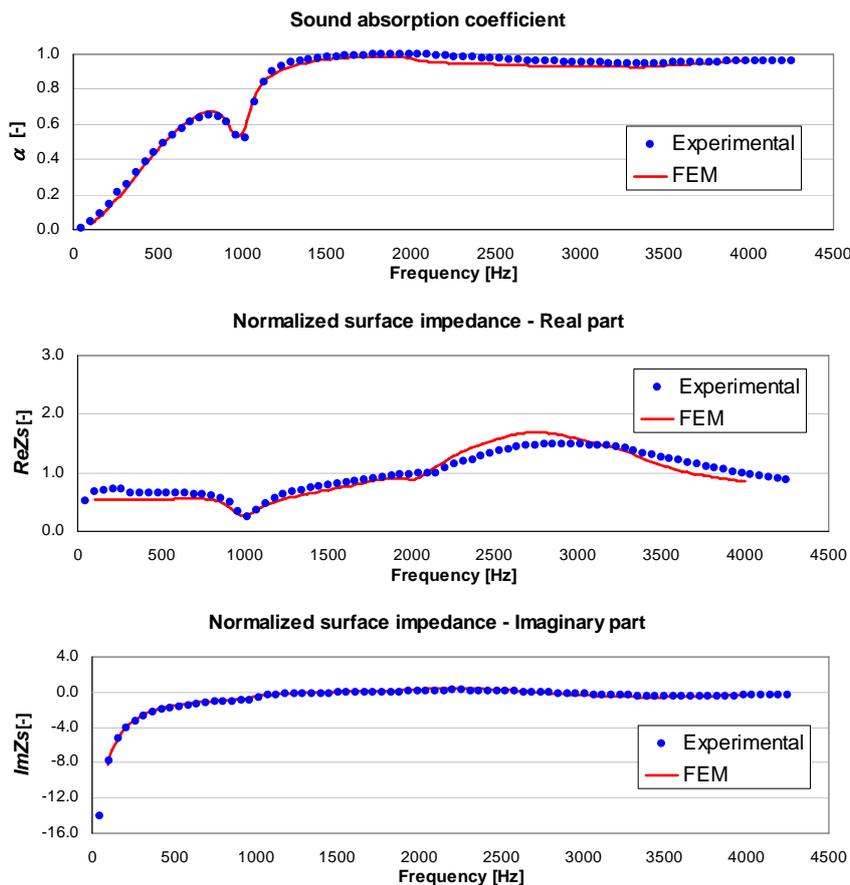


Figura 4 – Coefficiente di assorbimento acustico e impedenza superficiale normalizzata per il campione di melammina con diametro di 47mm: confronto tra misure sperimentali e modello FEM utilizzando i parametri meccanici ottenuti per mezzo di tecnica di inversione.

In questo caso l'accordo tra misure sperimentali e modello FEM è molto soddisfacente; ancora una volta però va evidenziato che le condizioni al contorno sperimentali differiscono da quelle teoriche e tale effetto può portare a delle differenze significative tra i valori sperimentali e calcolati dei parametri meccanici.

La Figura 5 riporta lo stesso confronto per il campione di melammina avente un diametro pari a 100 mm, al fine di simulare l'effetto del diametro del provino sulla frequenza di risonanza.

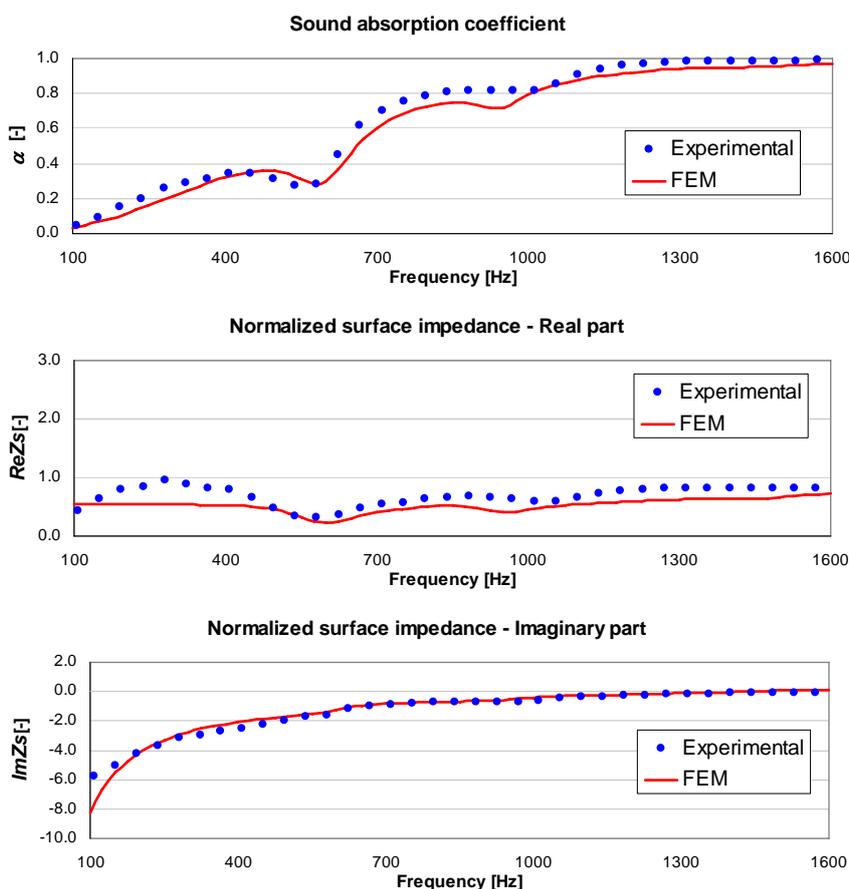


Figura 5 – Coefficiente di assorbimento acustico e impedenza superficiale normalizzata per il campione di melammina con diametro di 100mm: confronto tra misure sperimentali e modello FEM utilizzando i parametri meccanici ottenuti per mezzo di tecnica di inversione.

Dalla figura su può osservare che il modello FEM è in grado di prevedere lo spostamento, evidenziato sperimentalmente, della risonanza verso frequenze inferiori all'aumentare del diametro.

#### 4.3. Analisi di sensitività applicata al modello FEM

Nel presente paragrafo vengono riportati i risultati di un'analisi di sensitività del modello FEM implementato al fine di valutare gli effetti delle variazioni delle proprietà meccaniche sul coefficiente di assorbimento acustico per incidenza normale. In particolare vengono analizzate le variazioni della frequenza di risonanza e del valore del coefficiente di assorbimento a tale frequenza per delle variazioni del modulo di Young

e del coefficiente di Poisson pari a  $\pm 10\%$  e  $\pm 20\%$  rispetto ai valori riportati in Tabella 1. I cinque parametri fisici e lo smorzamento interno sono stati fissati ai valori di detta tabella. I risultati vengono riportati in Figura 6.

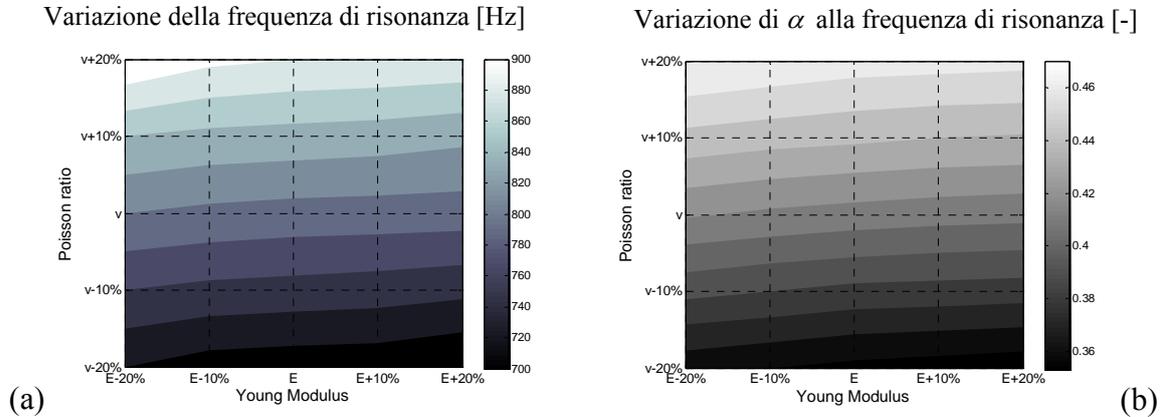


Figura 6 – Effetto della variazione del modulo di Young e del coefficiente di Poisson sulla frequenza di risonanza (a) e sul valore del coefficiente di assorbimento a detta frequenza (b)

L'analisi della figura precedente mostra come i valori della frequenza di risonanza siano influenzati dalle variazioni delle proprietà meccaniche. In particolare si osservano differenze di circa  $\pm 100$  Hz rispetto al valore della frequenza di risonanza determinata dai dati misurati sperimentalmente. Analogamente si riscontrano variazioni di  $\pm 6\%$  per quanto riguarda il valore del coefficiente di assorbimento alla frequenza di risonanza.

Dalla Figura 6 si può inoltre osservare che i valori minimo e massimo della frequenza di risonanza e del corrispondente valore del coefficiente di assorbimento si ottengono per le combinazioni  $[E + 20\%; \nu - 20\%]$  e  $[E - 20\%; \nu + 20\%]$  rispettivamente. Le curve del coefficiente di assorbimento acustico apparente (in un intervallo di frequenze tra 300 e 1500 Hz) ottenute utilizzando tali valori estremi delle proprietà meccaniche sono riportate in Figura 7 insieme alla simulata utilizzando i valori in Tabella 1.

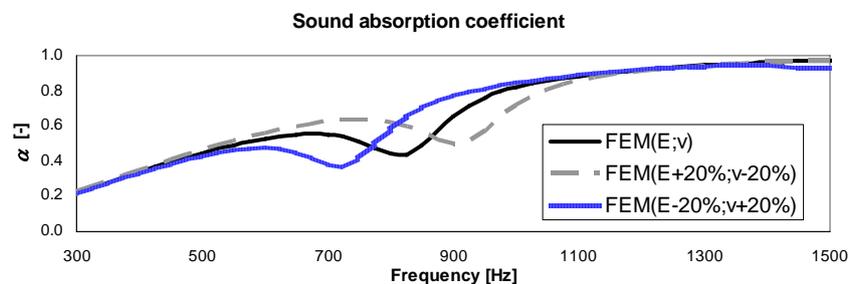


Figura 7 – Curve di variabilità del coefficiente di assorbimento acustico per effetto delle variazioni delle proprietà meccaniche.

## 5. Conclusioni

Nel presente articolo è stata riportata l'implementazione di una formulazione mista (spostamento-pressione) per mezzo di un codice agli elementi finiti per la modellizzazione del comportamento vibro-acustico di materiali poroelastici.

Il modello è stato inizialmente utilizzato per la verifica dei valori delle proprietà meccaniche (modulo di Young, coefficiente di Poisson e smorzamento interno) misurati sperimentalmente. I risultati hanno evidenziato l'influenza e l'importanza di una corretta modellizzazione delle condizioni al contorno nel modello FEM.

Successivamente il modello è stato usato per la determinazione dei suddetti parametri meccanici per mezzo di una minimizzazione dei valori teorici del coefficiente di assorbimento acustico rispetto ai valori della stessa grandezza misurati sperimentalmente. I risultati ottenuti per mezzo della procedura di inversione sono molto soddisfacenti anche se la maggiore limitazione è dovuta al tempo di calcolo.

Infine è stata presentata un'analisi di sensitività al fine di determinare l'effetto di variazioni dei parametri meccanici di input del modello coefficiente di assorbimento acustico per incidenza normale. L'analisi risulta fondamentale per la valutazione delle incertezze sui risultati del modello.

Sviluppi futuri della presente ricerca prevedono l'implementazione di un modello a simmetria assiale al fine ridurre i tempi di computazione e l'implementazione di tecniche di inversione basate su algoritmi genetici per una affidabile determinazione delle proprietà meccaniche. Inoltre il modello sarà utilizzato per la previsione della risposta vibro-acustica di sistemi multistrato per applicazioni meccaniche.

## Bibliografia

- [1] Biot, M.A., "Theory of propagation of elastic waves in a fluid-saturated porous solid"; *J Acoust. Soc. Am.* 28 (1956).
- [2] Allard J.F., *Propagation of sound in porous media*, Elsevier, Applied Science, London and New York (1993).
- [3] Atalla N., Panneton R., Debergue P., "A mixed displacement-pressure formulation for poroelastic materials", *J Acoust. Soc. Am.* 104(3), (1998).
- [4] ISO 9053:1991. *Acoustics - Materials for acoustical applications - Determination of airflow resistance*
- [5] Pompoli F., Bonfiglio P., "Apparecchiatura per la misura della porosità di materiali a cella aperta", *ATTI 34° Convegno AIA, Firenze (2007)*.
- [6] Bonfiglio P., Pompoli F., "Misura sperimentale della tortuosità di materiali a cella aperta con tecnica ad ultrasuoni", *ATTI 34° Convegno AIA, Firenze (2007)*.
- [7] Pompoli F., Bonfiglio P., "Tecniche avanzate di caratterizzazione fisico-acustica di materiali porosi", *ATTI 35° Convegno AIA, Milano (2008)*.
- [8] E. Mariez, S. Sahraoui, and J. F. Allard, "Elastic constants of polyurethane foam's skeleton for Biot model," *Proceedings of Internoise (1996)*.
- [9] Bonfiglio P., Pompoli F., "Metodo polinomiale per la caratterizzazione meccanica di materiali porosi", *ATTI 35° Convegno AIA, Milano (2008)*.
- [10] ISO 10354-2:1996, *Acoustics-Determination of sound absorption coefficient and impedance in impedance tubes - Part 2: Transfer-function method*.
- [11] Bonfiglio P., Pompoli F., "Comparison of different inversion techniques for determining physical parameters of porous media", *Proceedings of ICA 2007, Madrid (2007)*.