

METODI POLINOMIALI PER LA CARATTERIZZAZIONE MECCANICA DI MATERIALI POROSI

Paolo Bonfiglio, Francesco Pompoli, Paresh Shravage
Dipartimento di Ingegneria, Università di Ferrara, Ferrara

1. Introduzione

I modelli più completi per la descrizione del comportamento acustico dei materiali porosi richiedono la definizione di parametri geometrici relativi alla struttura dei pori per considerare la propagazione del suono al loro interno, ed inoltre necessitano delle proprietà elastiche del materiale per modellare la propagazione attraverso la struttura elastica che ne costituisce lo scheletro.

Diversi metodi di misura statici, quasi-statici e dinamici sono stati proposti in letteratura; la scelta della tecnica di misura appropriata è influenzata dalla geometria, dal fattore di smorzamento e dall'intervallo di frequenza di interesse.

Nel presente articolo vengono descritti e confrontati due metodi quasi-statici per la determinazione sperimentale dei parametri elastici (modulo di Young (E), coefficiente di Poisson (ν), smorzamento interno (η)) basati sulla misura dell'impedenza meccanica di due provini cilindrici di diverso diametro, sulla misura della deformazione laterale e sull'utilizzo di specifiche relazioni polinomiali. Vengono riportate misure eseguite su materiali porosi sottoposti a differenti carichi di tipo statico e dinamico e posti sotto vuoto, allo scopo di definire il contributo elastico determinato dall'aria contenuta all'interno dei pori.

2. Descrizione dei metodi di misura

Nel presente paragrafo verranno descritti i due metodi di misura quasi-statica delle proprietà meccaniche di materiali. E' necessario sottolineare che tali parametri sono complessi e dipendenti dalla frequenza a causa della viscosità della struttura dei materiali porosi. Quindi dovrebbero essere effettuati test dinamici per una caratterizzazione di tali materiali. Tuttavia, anche quando i valori dinamici dei parametri meccanici sono molto superiori ai loro valori statici, è stato mostrato, per mezzo di simulazioni e misure, che l'uso di valori costanti delle proprietà meccaniche porta a risultati molto soddisfacenti [1].

2.1. Metodo A: metodo basato sulla misura di impedenza meccanica e deformazione laterale di un provino cilindrico

Tale metodo è stato proposto da Marietz *et al.* [2]; la schematizzazione del set-up di misura è riportata in Figura 1.

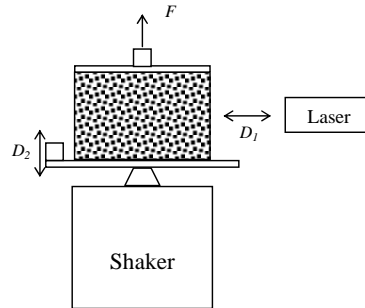


Figura 1. Set-up di misura proposto da Marietz.

Un provino cilindrico è posizionato tra due piatti rigidi paralleli. Il piano inferiore è eccitato trasversalmente da uno shaker elettrodinamico mentre il piano superiore è fisso. Il metodo prevede inizialmente la misura della deformazione laterale D_1 per mezzo di un vibrometro laser, e successivamente la determinazione dello spostamento trasversale D_2 e della forza F trasmessa dal provino per mezzo di un accelerometro e di una cella di carico rispettivamente.

Per mezzo di tali quantità è possibile determinare le seguenti grandezze, complesse e funzioni della frequenza:

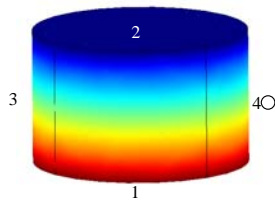
$$T' = \frac{D_2}{D_1} \quad \text{e} \quad Z = \frac{F}{D_1} \quad \left[\frac{N}{m} \right] \quad (1)$$

Di tali funzioni si considerano solamente le parti reali, indicate con T e K . La grandezza K è definita rigidità di compressione.

Da tali grandezze è possibile calcolare le proprietà meccaniche utilizzando un modello statico di elasticità lineare agli elementi finiti del materiale in esame. In Figura 2 è riportato un esempio del modello agli elementi finiti e delle condizioni al contorno applicate. La procedura di calcolo è la seguente:

- a) per un valore arbitrario del modulo di Young e dello smorzamento interno si effettuano simulazioni al variare del coefficiente di Poisson; si può così ottenere una curva simulata della funzione T in funzione del coefficiente di Poisson;
- b) si confronta il valore della funzione T misurata con la suddetta curva e si determina il valore del coefficiente di Poisson corrispondente;
- c) successivamente nel modello FEM si fissa il coefficiente di Poisson al valore determinato al punto b) e si effettuano simulazioni al variare del modulo di Young; si può così ottenere una curva simulata della funzione K in funzione del modulo di Young;
- d) si confronta il valore della funzione K misurata con la suddetta curva e si determina il valore del modulo di Young che minimizza la differenza tra il valore misurato e quello simulato;
- e) il coefficiente di smorzamento si calcola dalla funzione Z complessa come:

$$\eta = \frac{\text{Im}\{Z\}}{\text{Re}\{Z\}} \quad (2)$$



- 1) Spostamento imposto : 1mm
- 2) Contorno perfettamente vincolato
- 3) Superfici perfettamente libere

- Sulla superficie 2 si calcola la forza trasmessa dal provino;
- Nel punto 4 si misura lo spostamento orizzontale.

Figura 2. Modello agli elementi finiti e condizioni al contorno

In Figura 3 viene riportata una schematizzazione della procedura di calcolo.

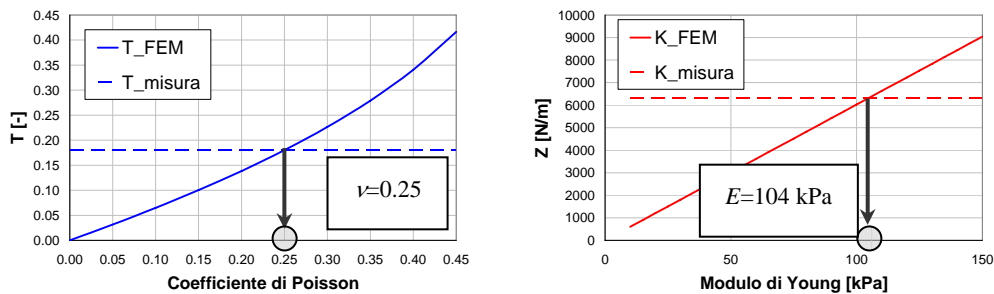


Figura 3. Schematizzazione della procedura di calcolo delle proprietà meccaniche

2.2. Metodo B: metodo basato sulla misura di impedenza meccanica di due provini cilindrici di diverso diametro

Atalla *et al.* [1] hanno proposto un metodo di misura basato sulla misura dell'impedenza meccanica di due provini cilindrici, aventi diverse dimensioni, e sull'utilizzo di specifiche relazioni polinomiali per determinare simultaneamente il modulo di Young e il coefficiente di Poisson. Il set-up di misura è del tutto analogo a quello riportato in Figura 1.

In tale contesto è utile definire un fattore di forma $s = R/2L$ (R : raggio - L : spessore del provino cilindrico). Per una colonna di forma allungata (tipicamente $s < 0.025$), la rigidezza statica di compressione non è realmente influenzata né dal coefficiente di Poisson né dalle condizioni al contorno. In questo caso la colonna può essere caratterizzata dal seguente modulo di Young:

$$E = \frac{L}{A} K \tag{3}$$

dove A è la sezione trasversale della colonna. Quindi in questo caso una misura di impedenza meccanica consente la determinazione univoca del modulo di elasticità.

In presenza di un fattore di forma alto, gli effetti di Poisson e le condizioni al contorno producono un rigonfiamento laterale e non possono essere trascurati. In questo caso il modulo di Young può essere riscritto come:

$$E = \frac{K \cdot L}{A \cdot P_s(\nu)} \tag{4}$$

dove il termine $P_s(\nu)$ è stato introdotto per tener conto degli effetti descritti precedentemente.

Per la determinazione delle proprietà meccaniche viene utilizzato il modello FEM descritto in Figura 2. In questo caso, per un fissato valore del modulo di Young E_0 , vengono effettuate simulazioni al variare del fattore di forma (considerando provini di dimensioni diverse) e del coefficiente di Poisson. Si ottiene così il grafico riportato in Figura 4.

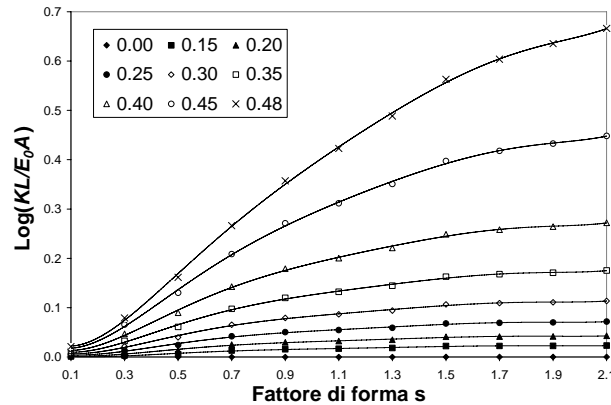


Figura 4. Variazione della rigidità di compressione al variare del fattore di forma e del coefficiente di Poisson

Nella figura precedente le curve continue sono state ottenute per mezzo di una interpolazione polinomiale (ordine 10) dai valori discreti ottenuti al FEM. Una volta ottenuti tali polinomi è possibile calcolare le proprietà meccaniche nel seguente modo:

- a) si effettuano misure di rigidità di compressione su due provini dello stesso materiale (K_1 e K_2) aventi fattori di forma diversi (s_1 e s_2).
- b) dalla Figura 4 si costruiscono i polinomi (ordine 8) per i due fattori di forma. Una schematizzazione della procedura di calcolo dei polinomi è riportata in Figura 5.

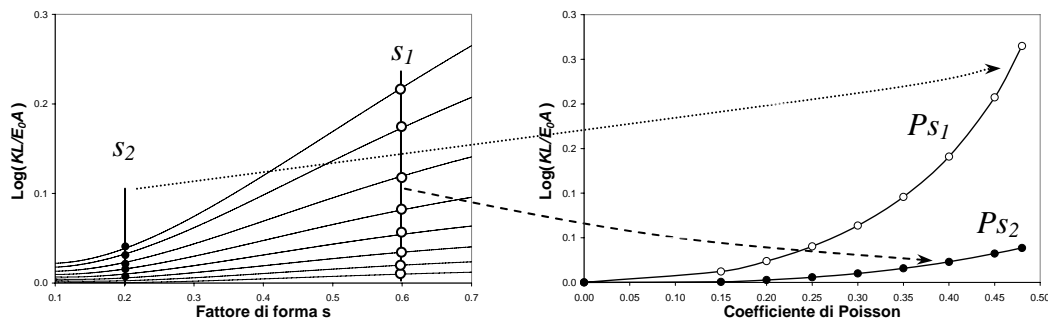


Figura 5. Costruzione dei polinomi

- c) l'equazione 4 per i due provini vale:

$$E_1 = \frac{K_1 \cdot L_1}{A_1 \cdot P_{s_1}(\nu)} \quad \text{e} \quad E_2 = \frac{K_2 \cdot L_2}{A_2 \cdot P_{s_2}(\nu)} \tag{5}$$

- d) dato che i due provini sono costituiti dallo stesso materiale è possibile calcolare il coefficiente di Poisson come la radice (reale e positiva) dell'equazione $E_1 - E_2 = 0$. Una volta calcolato il coefficiente di Poisson è possibile determinare il modulo

di Young dei due provini utilizzando ancora le espressioni (5).

- e) il coefficiente di smorzamento si calcola dalla funzione Z complessa utilizzando l'equazione (2) per ciascuno dei due provini.

3. Descrizione dell'apparecchiatura di misura

L'apparecchiatura di misura è stata sviluppata in collaborazione con la Facoltà di Ingegneria dell'Università di Trento e l'INFN di Legnaro.

La struttura portante è costituita da un disco metallico opportunamente dimensionato e lavorato, sorretto da tre colonne fissate a un piano di lavoro mobile. Su questa superficie al centro dell'area delimitata dalle tre colonne di sostegno è posizionato, tramite due supporti ad angolo, lo shaker che trasmette il suo moto a un piatto metallico a contatto con la parte inferiore del provino; sul bordo esterno di tale piatto è montato un accelerometro. La parte superiore del provino è in contatto con un'altro piatto (più piccolo e concentrico con quello inferiore) direttamente collegato a una cella di carico che misura la forza trasmessa dal materiale testato. La cella di carico è sostenuta da una vite alla cui estremità è inserito un pomello che permette di traslare verticalmente il piatto superiore variando così il precarico sul provino. Inoltre l'apparecchiatura consente di effettuare misure in vuoto per mezzo di una pompa da vuoto Edwards RV12 e una campana di vetro.

La catena di misura è costituita da:

- Shaker B&K Type 4809
- Amplificatore di potenza B&K Type 2716C
- Cella di carico PCB 288D01
- Accelerometro B&K Type 4501
- Condizionatori di segnale B&K Nexus e MESA MUX10A
- Vibrometro Laser Polytech OFV3001
- scheda di acquisizione ESI Wami Rack 192X
- PC con software dedicati sviluppati in ambiente Labview® e Matlab®.

In Figura 6 è riportata l'apparecchiatura di misura insieme ad alcuni particolari.

Le misure di funzione di trasferimento e impedenza meccanica sono state effettuate tramite risposte all'impulso, ottenute mediante il metodo della sine-sweep esponenziale, in un range di frequenza compreso tra 10 Hz e 80 Hz ed inferiore alla prima frequenza di risonanza dell'intero sistema.

Per quanto riguarda la calibrazione della cella di carico e dell'accelerometro viene testata una molla calibrata. Nel suddetto intervallo di frequenze la rigidità della molla calibrata è considerata costante e equivalente al suo valore statico K_0 .

Quindi è possibile definire una funzione di calibrazione H_c (complessa e funzione della frequenza) e l'impedenza meccanica calibrata nel seguente modo:

$$H_c(\omega) = \frac{1}{K_0} \frac{F(\omega)}{D_1(\omega)} \Big|_{molla} \quad \text{e} \quad Z_c = \frac{Z(\omega)}{H_c(\omega)} \quad (6)$$

Per quanto riguarda la misura del coefficiente di Poisson non è richiesta nessuna procedura di calibrazione in quanto gli spostamenti D_1 e D_2 sono stati ottenuti utilizzando lo stesso vibrometro laser.

Per evitare lo scorrimento laterale del campione le due superfici piane del provino sono fissate ai piatti tramite nastro biadesivo.

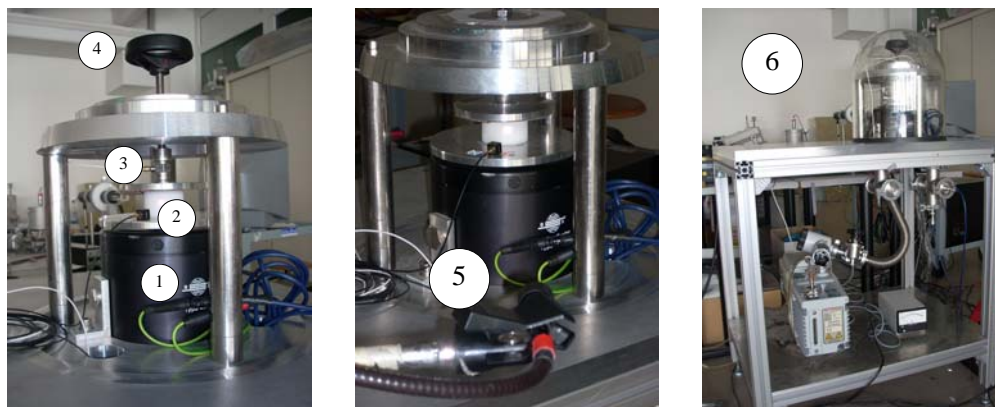


Figura 6. Apparecchiatura di misura: 1-shaker, 2-Accelerometro, 3-Cella di carico, 4-sistema di precarico, 5-laser, 6-sistema per il vuoto

4. Risultati

Nel presente paragrafo vengono riportati i risultati sperimentali ottenuti per mezzo delle tecniche di misura descritte. In particolare verranno prima confrontati i risultati ottenuti per mezzo dei due metodi di misura; successivamente sarà investigato l'effetto della variazione del livello di eccitazione dinamica e del precarico statico; infine verranno riportati i risultati delle misure eseguite sotto vuoto.

Nella indagine condotta sono stati testati tre materiali porosi e fibrosi. Una descrizione è riportata in Tabella 1.

Tabella 1. Descrizione dei materiali testati

Materiale	Simbolo	Spessore [mm]	Densità [Kg/m ³]	Resistività al flusso d'aria [Ns/m ⁴]	Porosità [-]
Melamina	M30	28	10	10800	0.995
Poliuretano	PU20	20	30	30372	0.993
Lana di roccia	RW20	20	110	77290	0.987

Per ciascun materiale sono stati testati provini aventi diametro pari a 45 e 30mm, indicati rispettivamente con S_1 e S_2 . I valori della rigidità di compressione K e della funzione T sono stati calcolati come valor medio dei relativi valori in frequenza da 20 a 40 Hz. Inoltre la funzione di trasferimento T è stata misurata solo per i provini S_1 di ciascun materiale.

4.1. Confronto tra le due tecniche di misura

In Tabella 2 vengono riportati i valori delle rigidità di compressione K_1 e K_2 per i provini S_1 e S_2 e della funzione di trasferimento T per i provini S_1 dei materiali M30, PU20 e RW20. I materiali sono stati testati nelle stesse condizioni di precarico e carico dinamico. Nella stessa tabella sono riportati i valori del modulo di Young (E), del coefficiente di Poisson (ν) e dello smorzamento interno (η) ottenuto per mezzo dei metodi A e B.

E' necessario sottolineare che per tutte le misure effettuate sono state osservate variazioni inferiori al 5% per le misure di K_1 e K_2 e inferiori al 2% per le misure di T .

Dall'analisi dei risultati in tabella è possibile osservare che i valori del modulo di Young ottenuto per mezzo dei due metodi sono consistenti.

Tabella 2. Confronto tra i due metodi testati

Materiale	K_1 [N/m]	K_2 [N/m]	T [-]	Metodo A		Metodo B		η [-]
				E [Pa]	ν [-]	E [Pa]	ν [-]	
M30	6816	3345	0.196	114079	0.27	106343	0.48	0.07
PU20	15532	6353	0.330	169374	0.33	154309	0.36	0.17
RW20	20411	9258	0.008	256787	0.01	238400	0.09	0.15

Per quanto riguarda il coefficiente di Poisson si osservano invece della differenze che possono essere anche rilevanti come nel caso del materiale M30.

La ragione di tali discordanze sono da ricercare nel metodo polinomiale B. Infatti tale metodo presuppone la misura su due provini identici dello stesso materiale e nelle medesime condizioni di misura. Inoltre entrambi i metodi assumono che i materiali siano omogenei ed isotropi e si comportino come dei solidi perfettamente elastici.

Di conseguenza viscoelasticità e disomogeneità del materiale stesso ed incertezze di misura, dovute principalmente al montaggio dei due provini e al non perfetto parallelismo tra i due piatti (riscontrato nell'apparecchiatura), possono portare ad incertezze tali da giustificare i valori delle due rigidità di compressione per mezzo di un coefficiente di Poisson sovrastimato.

A titolo di esempio per i materiali testati sono stati calcolati, per mezzo del modello FEM in Figura 2, il valore della rigidità di compressione "atteso" per i provini S_2 imponendo il modulo di Young ed il coefficiente di Poisson determinati per mezzo del metodo A. Tali valori sono stati confrontati in Tabella 3 con i valori misurati. Nella stessa tabella sono state anche riportate le incertezze (5%) sui valori misurati di K_2 .

Tabella 3. Confronto tra la rigidità di compressione misurata e attesa per i provini S_2

Materiale	K_2 misurato [N/m]	K_2 atteso [N/m]
M30	3345 ± 167	3008
PU20	6353 ± 318	6548
RW20	9258 ± 463	9073

Come si può osservare dalla precedente tabella variazioni anche ridotte delle rigidità di compressione tra i due provini possono portare ad errori sulla determinazione delle proprietà meccaniche.

Senza dubbio l'utilizzo di provini di dimensioni molto diverse (ad esempio 100mm e 30mm) renderebbe più precisa la procedura di calcolo dei parametri; purtroppo sull'attuale apparecchiatura il non perfetto parallelismo tra i due piatti non garantisce l'uniforme carico del provino di dimensioni maggiori introducendo ulteriormente incertezze nella determinazione della sua rigidità di compressione.

4.2. Effetto delle deformazioni statiche e dinamiche

Nel presente paragrafo sono riportati i confronti tra i valori delle proprietà meccaniche ottenute al variare del livello di eccitazione dello shaker (definito *carico dinamico*) e del livello di compressione iniziale del provino stesso (definito *precarico statico*). Il primo livello di precarico è stato fissato in modo che a tutte le frequenze fosse mantenuto il contatto tra i piatti metallici ed il provino. Dal valore iniziale del precarico sono stati applicati tre deformazioni di 0.1mm ciascuna.

Per quanto riguarda i livelli di eccitazione sono stati considerati spostamenti imposti al piattello inferiore pari a 0.06 mm, 0.08 mm, 0.12 mm, 0.17 mm e 0.24 mm.

A causa delle limitazioni evidenziate nel precedente paragrafo non è stato possibile determinare per mezzo del metodo B i valori dei parametri meccanici per tutti i valori di carico statico e dinamico applicati. Per tale ragione qui vengono solo presentati gli andamenti dei valori ottenuti utilizzando il metodo A.

Nelle figure 7-9 sono riportati gli andamenti dei parametri meccanici dei tre materiali tesati al variare della deformazione dinamica e statica iniziale. In ciascuna figura vengono riportati i valori degli scarti massimi per ciascun parametro meccanico calcolati rispetto ai valori medi complessivi.

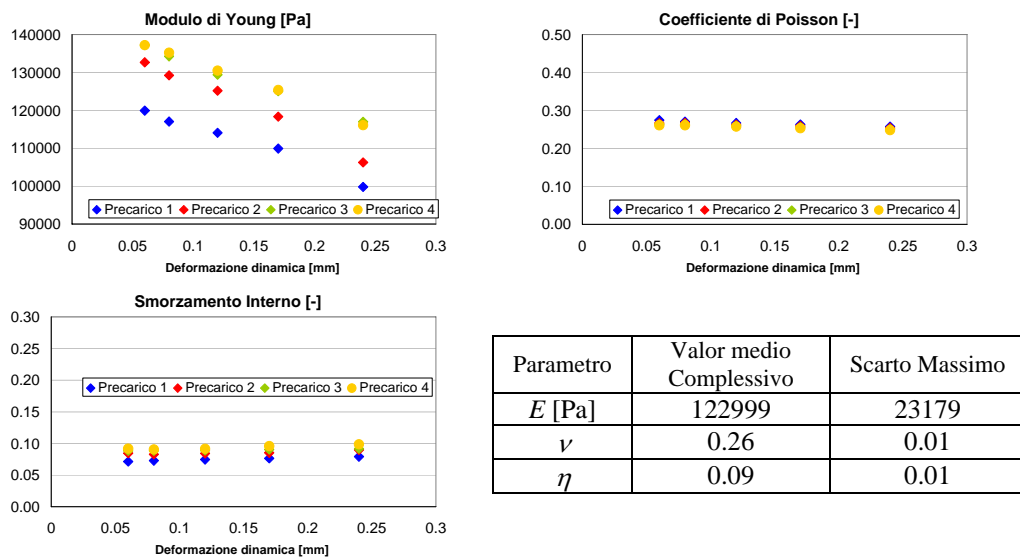


Figura 7. Proprietà meccaniche del materiale M30 al variare della deformazione statica iniziale e della deformazione dinamica

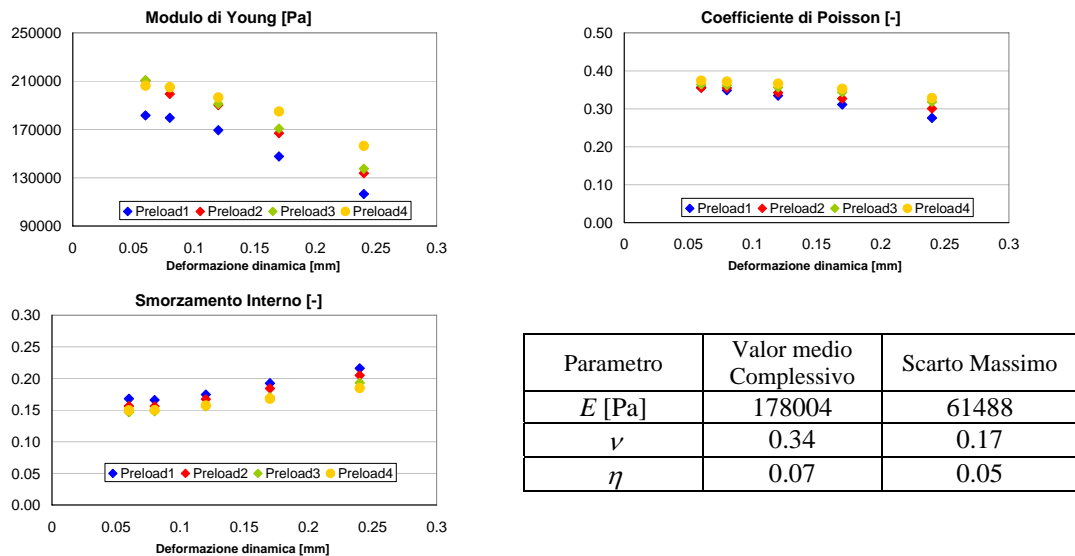


Figura 8. Proprietà meccaniche del materiale PU20 al variare della deformazione statica iniziale e della deformazione dinamica

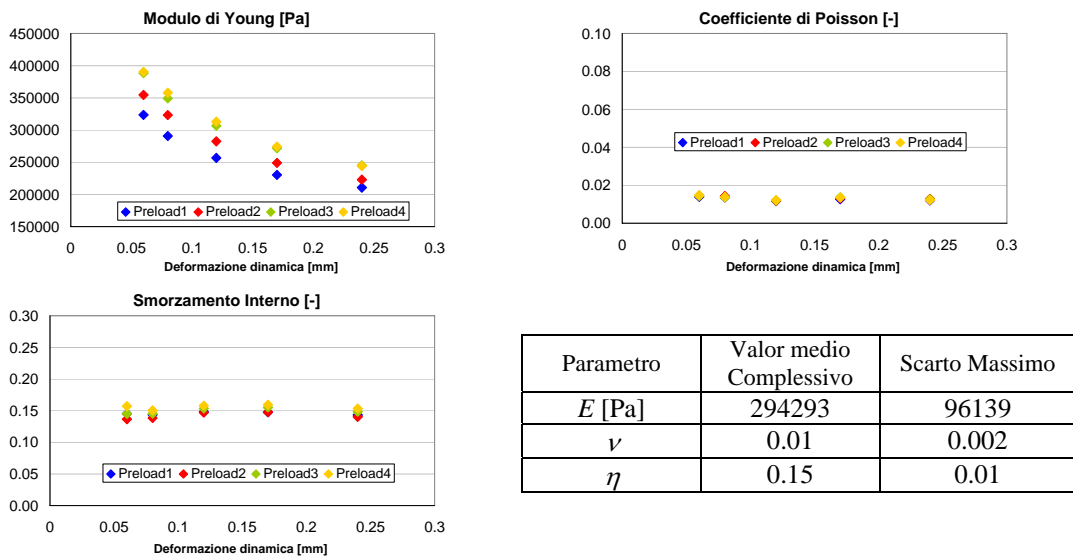


Figura 9. Proprietà meccaniche del materiale RW20 al variare della deformazione statica iniziale e della deformazione dinamica

I risultati possono essere riassunti come segue:

- per tutti i materiali testati il modulo di Young aumenta all'aumentare della deformazione statica e diminuisce all'aumentare della deformazione dinamica;
- per i materiali M30 e RW20 il coefficiente di Poisson è praticamente costante per tutti i valori di deformazione statica e dinamica applicati. Per il materiale PU20 si osserva un andamento simile a quello del modulo di Young;
- lo smorzamento non segue un andamento regolare per i materiali testati.

E' interessante sottolineare che per tutti i materiali testati i valori di deformazione applicati sono stati sempre inferiori al 5%; tale condizione dovrebbe garantire un comportamento lineare del materiale [3].

4.3. Effetto del vuoto sulla rigidità di compressione e sullo smorzamento interno

In Figura 10 vengono riportati i risultati preliminari delle misure di rigidità di compressione e smorzamento interno eseguite sotto vuoto al fine di determinare il contributo elastico determinato dall'aria contenuta all'interno dei pori. I risultati sono stati confrontati con i relativi dati ottenuti in aria. Le misure qui presentate sono state effettuate nelle stesse condizioni di deformazione statica iniziale e deformazione dinamica (0.12 mm). Il valore del vuoto utilizzato è pari a 300 Pa.

Dall'analisi delle figure precedenti è possibile osservare che per quanto riguarda la rigidità di compressione dei materiali testati non si osservano variazioni significative rispetto ai valori di deviazione standard. E' senza dubbio anomalo il confronto tra i valori di K per il materiale PU20. Infatti l'aria all'interno dei pori fa aumentare la rigidità del materiale, per cui il valore atteso per le misure sotto vuoto dovrebbe essere maggiore o uguale a quello ottenuto in aria. Tale aspetto sarà oggetto di studio di ricerche future.

I valori dello smorzamento interno non seguono un andamento regolare ed in ogni caso le variazioni nei due casi cadono ampiamente all'interno dell'errore sperimentale. Per poter confrontare i valori del modulo di Young, sarebbe necessario misurare anche il coefficiente di Poisson sotto vuoto; al momento l'apparecchiatura di misura non

consente questo tipo di misura.

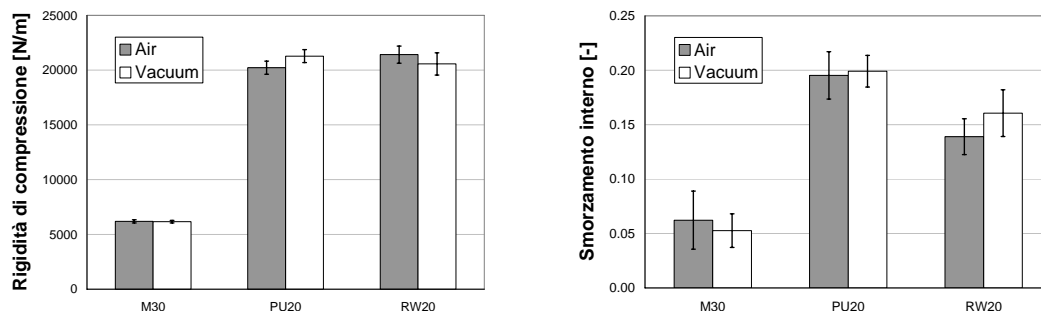


Figura 10. Confronto tra i valori di rigidità di compressione e smorzamento interno misurati in aria e sotto vuoto

5. Conclusioni

Nel presente articolo sono stati confrontati due metodi quasi-statici per la determinazione dei parametri meccanici di materiali poroelastici. Il confronto tra i due metodi ha evidenziato alcuni limiti dell'apparecchiatura di misura soprattutto in relazione procedura di misura su cui si basa il metodo B. In particolare tra le diverse possibili cause alla base di queste differenze si è considerata l'eventuale disomogeneità dei due provini dello stesso materiale e gli errori legati all'approssimazione del provino di misura con un solido lineare elastico nel modello agli elementi finiti.

Inoltre sono state effettuate misure per mezzo del metodo A (basato sulla misura diretta della deformazione trasversale e laterale e dell'impedenza meccanica di un singolo provino cilindrico) al variare del livello di eccitazione dello shaker e della deformazione statica iniziale imposto sul provino. Tale analisi ha permesso di studiare l'influenza di tali effetti sui valori delle proprietà meccaniche che possono portare anche a variazioni dell'ordine del 30% sul modulo di Young.

Gli sviluppi futuri del presente articolo prevedono un miglioramento della geometria dell'apparecchiatura di misura al fine di migliorare il parallelismo tra i due piatti, l'utilizzo di un trasduttore di carico statico per verificare la ripetibilità del posizionamento dei provini e la possibilità di effettuare misure delle proprietà meccaniche sotto vuoto al variare dei carichi di tipo statico e dinamico.

Bibliografia

- [1] C. Langlois, R. Panneton, N. Atalla, "Polynomial relations for quasistatic mechanical characterization of isotropic poroelastic materials, the Journal of the Acoustical society of America, 110-6 (2001).
- [2] E. Mariez, S. Sahraoui, and J. F. Allard, "Elastic constants of polyurethane foam's skeleton for Biot model," Proceedings of Internoise 96, (1996)
- [3] N. C. Hilyard and A. Cunningham, "Low Density Cellular Plastics-Physical Basis of Behavior" (Chapman & Hall, London, 1994).

Ringraziamenti

Gli autori ringraziano il Professore Gianantonio Della Mea, lo staff dell'INFN di Legnaro e Martina per la realizzazione e ottimizzazione dell'apparecchiatura di misura.